CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SFERA”,

EDIȚIA a XX-a, BĂILEȘTI, 29 MARTIE 2025

CLASA a IX-a

Partea I (50 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect:

1. Partea fracţionară a numărului $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}+6\sqrt{2}$ este egală cu:

a) $2\sqrt{6}+6\sqrt{2}-12$ **b)** $2\sqrt{6}+6\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{6}+6\sqrt{2}+13$ **d)** $2\sqrt{6}+6\sqrt{2}-13$

2. Numerele a, b şi c verifică egalitatea $a^2+b^2+c^2-40\sqrt{5}a+4\sqrt{5}b-2\sqrt{5}c+2025=0$. Produsul numerelor a, b şi c este egal cu:

a) -200 **b)** $-200\sqrt{5}$ **c)** $200\sqrt{5}$ **d)** 200

3. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=x-1$ este egal cu:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

4. Fie ABCD un dreptunghi cu $AB=4$ și $BC=3$. Modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ este egal cu:

a) 5 **b)** 10 **c)** 15 **d)** 20

5. Punctele distincte A_1, A_2 ,..., A_{10} sunt situate, în această ordine, pe o dreaptă d astfel încât $A_1A_2=A_2A_3=...=A_9A_{10}$. Dacă $\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_9}=k\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_{10}}\right)$ unde O este un punct arbitrar din plan, atunci numărul k este egal cu :

a) 4 **b)** 5 **c)** 0 **d)** 10

Partea a II-a (40 puncte)

Pentru problemele 1 și 2 notează pe lucrare rezolvările complete.

Problema 1 (20 puncte)

Fie $a,b,c\in N^*$ cu proprietatea că $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(b+\sqrt{c}\right)\left(c+\sqrt{a}\right)$ este număr raţional. Arătaţi că $\left(\sqrt{a}+b\right)\left(\sqrt{b}+c\right)\left(\sqrt{c}+a\right)$ este raţional.

(*prof.Mihai Opincariu, Gazeta Matematică 9/2022*)

Problema 2 (20 puncte)

a) Demonstrați că $\sqrt{k^2-1}+\sqrt{k^2+1}>\sqrt{4k^2-1},\forall k\geq 2$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2\left(\sqrt{2^2-1}+\sqrt{2^2+1}\right)}+\frac{1}{3\left(\sqrt{3^2-1}+\sqrt{3^2+1}\right)}+...+\frac{1}{n\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}<\frac{1}{3}.$$

prof. Cătălin Cristea, CN „Ștefan Velovan”, Craiova

Timp de lucru: 2 ore și 30 min

Din oficiu se acordă : 10 puncte

Barem de evaluare - Concursul interjudețean de matematică "Sfera" 2025
clasa a IX-a

Partea I : 1) **d** 2) **b** 3) **c** 4) **b** 5) **a**

Partea a II-a:

1) Notăm $u=\left(a+\sqrt{b}\right)\left(b+\sqrt{c}\right)\left(c+\sqrt{a}\right)\in ¤$ şi $v=\left(a-\sqrt{b}\right)\left(b-\sqrt{c}\right)\left(c-\sqrt{a}\right)$ …… **2p**

$uv=\left(a^2-b\right)\left(b^2-c\right)\left(c^2-a\right)\in ¤$, deci $v\in ¤$ …….... **3p**

Obţinem $u+v\in ¤$, de unde rezultă că $a\sqrt{ac}+b\sqrt{ab}+c\sqrt{bc}\in ¤$ …….....**3p**

Deducem că $\sqrt{ab},\ \sqrt{ac},\ \sqrt{bc}\in ¤$, $(*)$ ……..**2p**

Cum $u=abc+ab\sqrt{a}+bc\sqrt{b}+ca\sqrt{c}+a\sqrt{ac}+b\sqrt{ab}+c\sqrt{bc}+\sqrt{abc}$, rezultă că

$ab\sqrt{a}+bc\sqrt{b}+ca\sqrt{c}+\sqrt{abc}\in ¤$ ……...**5p**

Rezultă $\sqrt{abc}\left(\frac{ab}{\sqrt{bc}}+\frac{bc}{\sqrt{ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ab}}+1\right)\in ¤$ ……...**3p**

Folosind $(*)$ obţinem că $\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}\ \in ¤$, de unde $\left(\sqrt{a}+b\right)\left(\sqrt{b}+c\right)\left(\sqrt{c}+a\right)\in ¤$ ……**2p**

2) a) Prin ridicare la pătrat avem: $2k^2+2\sqrt{k^4-1}>4k^2-1\Leftrightarrow 2\sqrt{k^4-1}>2k^2-1$……**3p**

$4k^4-4>4k^4-4k^2+1\Leftrightarrow 4k^2>5$, relație adevărată, $\forall k\in N^*, k\geq 2$ ..……..**2p**

b) $\frac{1}{\sqrt{k^2-1}+\sqrt{k^2+1}}<\frac{1}{\sqrt{4k^2-1}}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k^2-1}+\sqrt{k^2+1}}<\sqrt{\frac{1}{2k-1}\cdot\frac{1}{2k+1}}$ ……..…**5p**

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$\frac{1}{\sqrt{k^2-1}+\sqrt{k^2+1}}<\frac{\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{k^2-1}+\sqrt{k^2+1}}<\frac{2k}{(2k-1)(2k+1)}\Leftrightarrow$ ……**5p**

$\Leftrightarrow \frac{1}{k\left(\sqrt{k^2-1}+\sqrt{k^2+1}\right)}<\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}.$

Luând $k=2,3,...,n$ și sumând, obținem:

$\frac{1}{2\left(\sqrt{2^2-1}+\sqrt{2^2+1}\right)}+\frac{1}{3\left(\sqrt{3^2-1}+\sqrt{3^2+1}\right)}+...+\frac{1}{n\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}<\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+$ …..**5p**

$+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{3}.$